O k r e s n á ľ u d o v á h v e z d á r e ň H U M E N N É

ASTRONÓMIA V PRÍKLADOCH

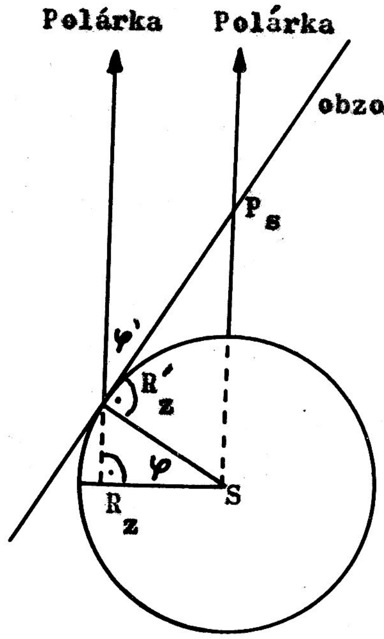
Okresná ľudová hvezdáreň v Humennom v spolupráci s Krajskou hvezdárňou v Prešove vydáva II.vydanie tohto materiálu pre vedúcich astronomických krúžkov Východoslovenského kraja s cieľom doplniť teoretické poznatky z astronómie v rámci krúžkovej činnosti aj o praktickú matematickú aplikáciu.

P r í k l a d : 1

Pri pozorovaniach ste si už určite všimli, že Severka / alebo Polárka/ je stále na tom istom mieste. Pokiaľ ste ale boli na výlete v BĽR alebo v Rumunsku /prípadne na exkurzii v planetáriu v Košiciach/, mohli ste postrehnúť, že i keď je Severka stále na tom istom mieste, nie je rovnako vysoko nad obzorom. Jej výška nad obzorom sa mení so zmenou zemepisnej šírky.

Dokáže, že zemepisná šírka pozorovateľa a výšky Severky nad obzorom sú zhodné!

R i e š e n i e :



Nakreslime si priemet našej Zeme a roviny pozorovateľa v určitej zemepisnej šírke /obr./. Nakoľko Severka je veľmi ďaleko, sú zemská os P_sS a lúč pozorovateľa rovnobežne. Označme φ zemepisnú šírku a φ' výšku Severky nad obzorom.

D ô k a z :

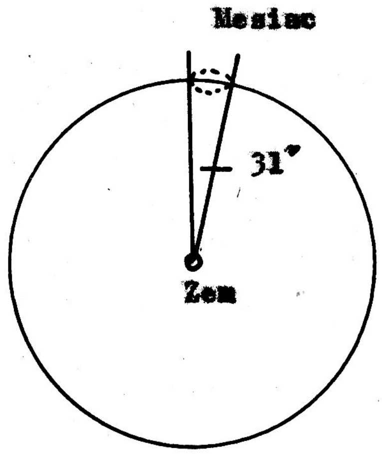
Rameno P_z /polomer Zeme/ uhla φ je kolmé na lúč pozorovateľa uhla φ' a rameno R_z uhla φ je kolmé na rameno "obzor" uhla φ'.
Zo siedmeho ročníka geometrie vieme, že uhly s navzájom kolmými ramenami sú zhodné, teda:

$$\varphi = \varphi'$$

P r í k l a d : 2

Keď sa večermi dívame na oblohu, nájdeme na nej z času na čas Mesiačik. Niekedy ho vidíme ako rohlíček, inokedy ako plný k·túčik. Na oblohe je pomerne malý. Jeho zorný uhol činí približne 31°. V skutočnosti Mesiac nie je taký malý, zorný uhol to je len jeho zdanlivý priemer. Vypočítajte si jeho skutočný priemer!

R i e š e n i e :



Nakreslime si situáciu v priestore /obr./.
Uvažujme následovne: celej dráhe Mesiaca okolo Zeme /môžeme ju s dostatočnou presnosťou považovať za kruhovú /odpovedá 360° = 21 600', priemeru Mesiaca odpovedá časť dráhy 31'. Celkovú dráhu s Mesiaca okolo Zeme /pri jeho priemernej vzdialenosti 384 000 km od Zeme/ vieme vypočítať ako $2\pi r$.

$s = 2\pi r \,.\, 384\,000 \text{ km} = 6{,}28 \,.\, 384\,000 \text{ km} = 2\,411\,520 \text{ km}$

priemer Mesiaca d potom vypočítame z úmery:

$s : 21\,600' = d : 31'$ – za s dosadíme

$$2\,411\,520 \text{ km} : 21\,600' = d : 31'$$

$$21\,600\, d = 2\,411\,520 \text{ km} \,.\, 31$$

$$d = \frac{2\,411\,520 \text{ km} \,.\, 31}{21\,600}$$

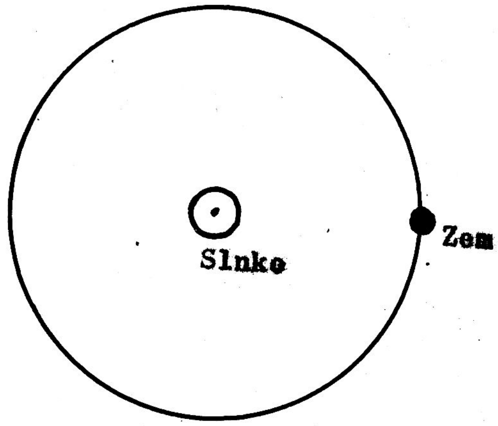
$$d = 3\,461 \text{ km}$$

$$\underline{\underline{d = 3\,500 \text{ km}}}$$

P r í k l a d : 3

Je skoro neuveriteľné ako doslova sa naša Zem rúti kozmickým priestorom. My, ľudia, na nej žijúci z toho pohybu ale nič necítime /prečo asi?/.Určite bude zaujímavé vedieť, akou rýchlosťou sa Zem pohybuje okolo Slnka. Vypočítajte si ju!

R i e š e n i e :



Pre jednoduchosť budeme uvažovať kruhovú dráhu Zeme okolo Slnka. I keď dráha je v skutočnosti elipsa, táto sa len málo líši od kružnice. Zakreslime si situáciu /obr./. Vieme, že Zem obíde $\odot$ za jeden rok; keď počítame, že rok má 365 dní, potom tomu odpovedá 31 536 000 sekúnd. Dráha našej Zeme okolo Slnka má pri polomere 149 000 000 km dĺžku 935 720 000 km. /$s = 2\pi r$/

Teraz už vypočítame rýchlosť našej Zeme ako pomer dráhy a času.

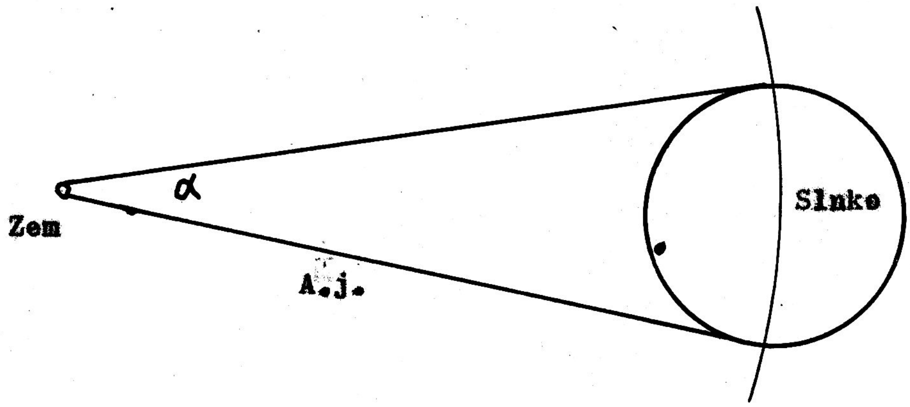
$$/ \; v = \frac{s}{t} = s : t \; /$$

$$\underline{\underline{v = 29{,}67 \text{ km/s}}}$$

P r í k l a d : 4

Určite nás,ktorí sa zaoberáme trochu pozorovaním Slnka bude zaujímať, ako by sme vedeli stanoviť veľkosť jeho priemeru, keď jeho zdanlivy priemer na oblohe činí 32'. Pritom budeme vychádzať zo skutočnosti, že už vieme ako ďaleko je od nás Slnko.

R i e š e n i e :



Nakreslime si príslušný obrázok. /obr./Priemer Slnka z tohe hľadiska je oblúk kružnice, ale vzhľadom na veľkú vzdialenosť Zeme od Slnka, tento nebude oveľa väčší než rovný priemer, takže budeme počítať dĺžku kružnicového oblúka.

$$d = \frac{2\pi A\,u}{360} \cdot d = \frac{3{,}14 \cdot 149 \cdot 10^6 km}{180 \cdot 60'} \cdot 32'$$

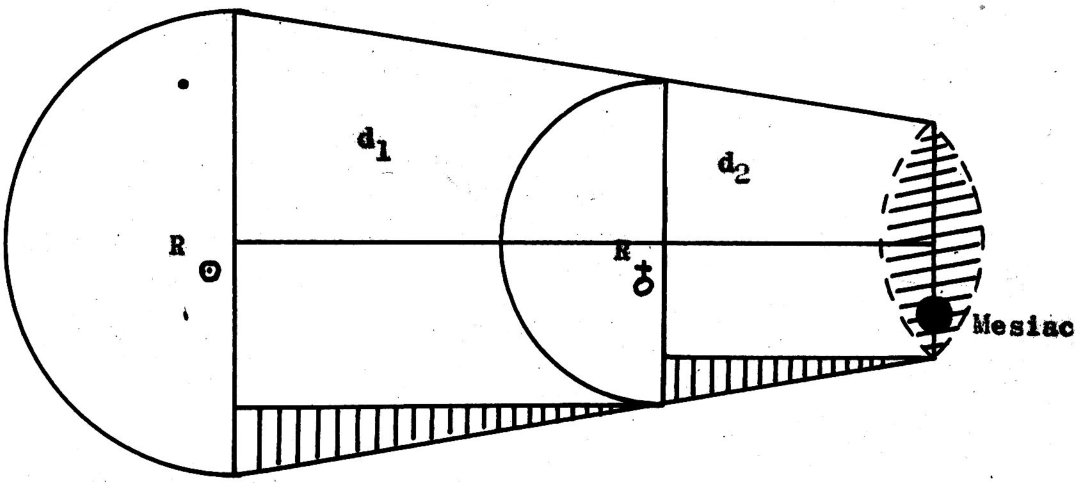
$$= 1\ 390\ 000\ km$$

A u = astronomická jednotka

P r í k l a d : 5

Ak sledujeme úplné zatmenie Mesiaca, zisťujeme, že trvá pomerne dlho. Čím je to spôsobené? Iste veľkosťou tieňa /uvažujeme iba úplný tieň/, ktorý vrhá naša Zem do priestoru vo vzdialenosti Mesiaca /384 000 km od Zeme/. Pobavte sa trochu a vypočítajte priemer tieňa, vrhnutého Zemou v tejto vzdialenosti! Koľkokrát prevyšuje priemer Mesiaca?

R i e š e n i e :



Zakreslime si situáciu telies v priestore v období zatmenia /obr./. Keď si tento obrázok všimneme, zistíme, že mame do činenia so zrezaným kužeľom a v ňom s dvoma podobnými trojuholníkmi /čiarkované/. Pre ne platí /z podobnosti trojuholníkov/

$$d_1 : d_2 = /R_{\odot} - R_{\oplus}/ : /R_{\oplus} - r/$$

pričom d_1; d_2; sú vzdialenosti Zeme od Slnka a Mesiaca od Zeme, r polomer vzhnutého tieňa.

Dosadením číselných hodnôt dostaneme:

$$1{,}496.10^8 : 3{,}84.10^5 = /6{,}98.10^5 - 6{,}37.10^3/ : /6{,}37.10^3 - r/$$

$$389{,}6 = 6{,}916.10^5 \text{ km} :/6{,}37.10^3 - r/$$

$$6{,}37.10^3 \text{km} - r = 1{,}775.10^3 \text{km}$$

$$r = /6{,}37.10^3 - 1{,}775.10^3/\text{km}$$

$$r = 4{,}595.10^3 \text{ km} = 4\ 595 \text{ km}$$

$$\underline{\underline{2r = 9\ 190 \text{ km}}}$$

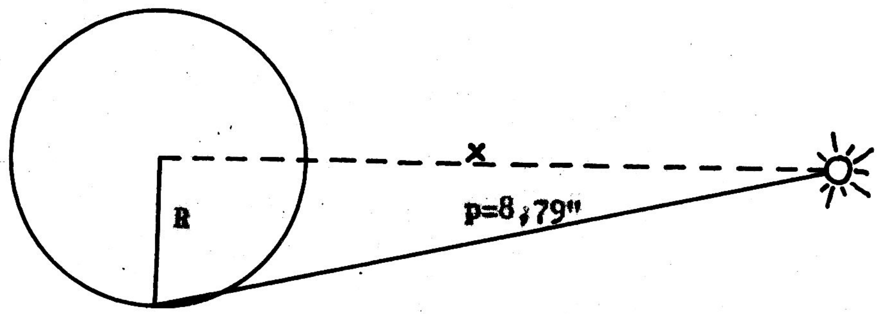
Priemer tieňa je 9 190 km. Tieň prevyšuje priemer Mesiaca 2,6 krát.

P r í k l a d : 6

V astronómii sa stretávame dosť často s pojmami vzdialenosti a paralaxa. Práve pojem paralaxa je dôležitý pri vypočítavaní vzdialenosti. Paralaxa Slnka je 8,79". Viete z toho údaju vypočítať vzdialenosť Zeme od Slnka?

/Na vysvetlenie: V slnečnej sústave paralaxou objektu rozumieme uhol, pod ktorým by sme z tohto objektu videli zemský polomer./

R i e š e n i e :



Zakreslime si obrázok s paralaxou Slnka /obr./.
Vidíme, že máme do činenia s pravouhlým trojuholníkom, ktorý vyriešime pomocou trigonometrických funkcií. O tomto trojuholníku platí:

$$\mathrm{tg}\ 8{,}79'' = \frac{R\,\text{♁}}{x} \Longrightarrow x = \frac{R\,\text{♁}}{\mathrm{tg}\ 8{,}79''}$$

Pre veľmi malé uhly platí: tg $\varphi \doteq \varphi'$ v oblúkovej miere

čiže $$x = \frac{R\,\text{♁}}{8{,}79''} = \frac{6\ 370\ \mathrm{km}}{\dfrac{\pi \cdot 8{,}79}{180.3600}}$$

$$\doteq 149\ 800\ 000\ \mathrm{km} \doteq 150\ 000\ 000\ \mathrm{km}$$

P r í k l a d : 7

S časovými otázkami sa stretávame v astronómii neustále. Ale nie vždy sa možno pochváliť tým, že všetko okolo toho je jasné. Pozorujete napríklad v Prešove hviezdu Rigel /beta Orionis/ a to dňa 21. novembra. Čo myslíte, koľko je vtedy hodín SEČ?

R i e š e n i e :

Uvažujeme nasledovne: Keď kolminuje jarný bod, je 0 hodín hviezdneho času. Jarný bod kolminuje spolu so Slnkom 21. marca o 12. hodine pravého miestneho času. Keďže sa počnúc týmto dňom Slnko vzďiaľuje od jarného bodu, bude jarný bod každý deň skôr kulminovať a to 4 minúty, čo za mesiac činí 2 hodiny. Od 21. marca do 21. novembra uplynie 8 mesiacov, t.j. jarný bod už bude kulminovať 2.8 = 16 hodín skôr. Uvážiť musíme ešte rozdiel medzi SEČ a prešovským časom, ktorý činí 26 minút pri vzdialenosti Prešova 6 1/2° od stredoevrópskeho poludníka. Rozdiel časovej rovnice, ktorý je v tomto období malý, nebudeme uvažovať. My ale pozorujeme kulmináciu hviezdy Rigel /beta Orionis/. Výpočet bude ten istý, uvážiť potrebujeme ale rektascenzin β Orionis, ktorá znamená, že v kulminácii tejto hviezdy je toľko hodín hviezdneho času.
$\alpha\beta$ Ori nájdeme v hviezdnom atlase.

V ý p o č e t :

SEČ 21. 11.

v kulminácii β Ori = 12 h - 16 h + $\alpha\beta$ Ori - 0 h 26 min
= - 4 h + 5 h 12 min - 0 h 26 min
= 5 h 12 min - 4 h 26 min
= 0 h 46 min

P r í k l a d : 8

Ako dlho by padala naša Zem na Slnko, ak sa náhle zastaví na svojej dráhe.

R i e š e n i e :

Uvažujeme, že sa dráha zmení na veľmi pretiahlu elipsu, ktorej poloos sa bude rovnať polovici vzdialenosti Zeme od Slnka. Afélium bude v bode, na ktorom sa Zem na svojej dráhe zastavila. Perihelium splýva so Slnkom.

Ak označíme r - polomer dráhy Zeme, potom veľká poloos elipsy bude:

$$a = \frac{r}{2}$$

Obežnú dobu po tejto elipse vypočítame z III. Keplerovho zákona

$$P^2 : P_o^2 = a^3 : r^3$$

pričom P_o je doba jedného roku /365,2 dňa/.
Ak dosadíme $a = \frac{r}{2}$ vyjadríme P nasledovne :

$$P = P_o \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{P_o}{2\sqrt{2}}$$

Zem by v tomto prípade vykonala len polovicu jedného obehu a potom by dopadla na Slnko. Doba, za ktorú Zem spadne na Slnko je teda daná vzťahom:

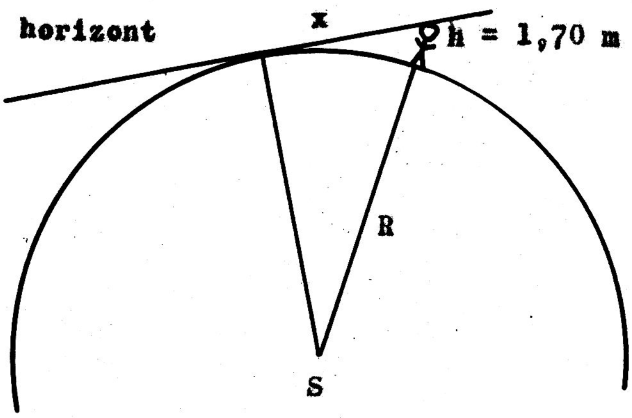
$$t = \frac{P}{2} = \frac{P_o}{4\sqrt{2}}$$

$$\underline{\underline{t = 64{,}6 \text{ dňa}}}$$

P r í k l a d : 9

Človek stojací na povrchu Zeme vie vnímať jej krásy v určitom obzore. Možno sa ani nezdá, ako ďaleko pritom človek dovidí. Zoberme jednoduchý prípad nížiny /skoro rovnej/ a 1,80 m vysokého človeka na tejto nížine. Ako ďaleko je horizont tohto človeka od výšky očí / výška očí a tohto človeka predpokladajme 1,78 m/ ?

R i e š e n i e :



Nakreslime si obrázok situácie /obr/. Podľa toho obrázku použitím Pytagorovej vety dostaneme :

$$x = \sqrt{/R + h/^2 - R^2} = \sqrt{R^2 + 2Rh + h^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$$

Pre zanedbateľnú veľkosť človeka vzhľadom k polomeru Zeme môžeme použiť vzorec v skrátenej forme :

$$x = \sqrt{2Rh}$$

Dosadením číselných hodnôt dostaneme:

$$x = \sqrt{2 \cdot 637 \cdot 10^4 \cdot 1,7\ m}$$

$$= 10^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 637 \cdot 1,7\ m}$$

$$= 10^2 \cdot \sqrt{2\ 167,8\ m}$$

$$= 10^2 \cdot 46,54\ m$$

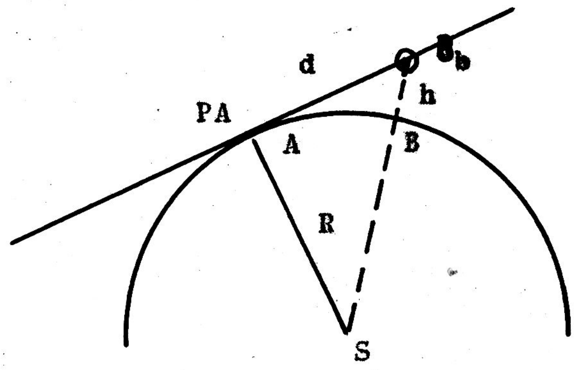
$$= 4\ 654\ m$$

P r í k l a d : 10

Z mesta A vzdialeného od mesta B 50 km sa pozoruje na horizonte balón,ktorý je kolmo nad mestom B.

V akej výške je tento balón?

R i e š e n i e :



Vzhľadom k zanedbateľným rozmerom pozorovateľa i výšky balóna oproti rozmerom Zeme, môžeme vzdialenosť A B = 50 km stotožniť so vzdialenosťou /odvesnou/ P_A B_B. Použitím Pytagorovej vety potom dostaneme:

$$d^2 + R^2 = /R + h/^2$$

$$d^2 + R^2 = R^2 + 2Rh + h^2$$

$$d^2 = +2Rh + h^2$$

Zanedbaním h^2 ďalej dostaneme :

$$d^2 = 2Rh$$

odkiaľ $$h = \frac{d^2}{2R}$$

dosadením číselných hodnôt plynie:

$$h = \frac{50^2 . 10^6 \, m^2}{2 . 6,37 . 10^6 \, m}$$

$$= \frac{2\,500}{12,74} \, m$$

$$= 196,23 \, m \doteq 196 \, m$$

P r í k l a d : 11

Jupiterov mesiac Jo, ktorý je podobne ako aj ďalšie tri mesiace Europa, Ganymed, Kullisto, veľmi vďačným pozorovaním objektom, obehne Jupiter vo vzialenosti $4{,}218 \cdot 10^8$ m raz za 1,769 dní.

Ako by ste na základe týchto údajov zistili, akú hmotnosť má planéta Jupiter?

R i e š e n i e :

Nakoľko Jupiterové mesiace majú proti nemu zanedbateľnú hmotnosť, leží hmotnostný stred prakticky v strede Jupitera, čo značí, že polomer dráhy masiaca je rovný vzdialenosti Jo - Jupiter. Ak uvažujeme kruhovú obežnú dráhu Jo /čo prakticky môžeme/, potomje gravitačná /príťažlivá/ sila vždy kolma na dráhu, teda zhodná s dostredivou silou.

Platí teda:

$$\frac{G \cdot m_{♃} \cdot m}{a^2} = m \cdot \omega^2 \cdot a$$

a úpravou $$m_{♃} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{T^2}$$ pričom G je

gravitačná konštanta a polomer dráhy Jo, m jeho hmotnosť a $\omega = \frac{2\pi}{T}$

kruhová frekvencia, T - obežná dráha. Dosadením dostaneme:

$$m_{♃} = \frac{4\pi^2 \cdot 4{,}218^3 \cdot 10^{24}\,m^3}{6{,}670 \cdot 10^{-11}\,m^3\,kg^{-1} \cdot s^{-2} \cdot /1{,}769 \cdot 86\,400 s/2}$$

$$= 1{,}9 \cdot 10^{27}\,kg$$

$$= 1{,}9 \cdot 10^{24}\text{ ton /1,9 kvadrimiliónov ton /}$$

P r í k l a d : 13

Keď už vieme, aká je hmotnosť Jupitera a k tomu ešte budeme vedieť, že jeho polomer R je rovný 6, 989 . 10^7 m, určite budeme vedieť určiť jeho priemernu hustotu a gravitačné zrýchlenie na jeho povrchu. Vypočítajte si tieto hodnoty!

R i e š e n i e :

Hustotu vypočítame podľa vzorca:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad /\frac{\text{hmotnosť}}{\text{objem}}/$$

Dosadením pre Jupiter dostaneme :

$$\rho_{♃} = \frac{m_{♃}}{\frac{4\pi}{3} R^3_{♃}} = \frac{3\, m_{♃}}{4\pi\, R^3_{♃}}$$

$$\rho_{♃} = \frac{3 \,.\, 1{,}90 \,.\, 10^{27}}{4\pi \,.\, 6{,}989^3 .\, 10^{21}\, m^3} =$$

$$= 1{,}33 \,.\, 10^3\ kg/m^3$$

Gravitačné zrýchlenie vypočítame zo vzorca:

$$g_{♃} = \frac{G \,.\, m_{♃}}{R^2_{♃}}$$

Dosadením dostaneme:

$$g_{♃} = \frac{6{,}670 \,.\, 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \,.\, 1{,}90 \,.\, 10^{27} kg}{6{,}989^2 \,.\, 10^{14}\, m^2}$$

$$= 26{,}0\ m \,.\, s^{-2}$$

Ako vidíme, na Jupiterovi je gravitačné zrýchlenie približne 2,7 krát väčšie ako na Zemi.

P r í k l a d : 13

Z pozorovaní by sme zistili, že Galileove mesiace Jupitera nie sú od jeho povrchu či stredu rovnako vzdialené, to je úplne samozrejmé. Menej samozrejmévšak je, ako možno vzdialenosti vypočítať. Zacvičme si a vypočítajme vzdialenosť Kallista od Jupitera, keď obehne tento raz za 16,689 dní a Jo obehne Jupiter vo vzdialenosti $4.218 \cdot 10^8$ m raz za 1,769 dní!

R i e š e n i e :

Nakoľko hmotnosti oboch Jupiterových mesiacov sú oproti hmotnosti planéty zanedbateľné, použijeme III. Keplerov zákon v pôvodnej forme:

$$\frac{a_1^3}{a_4^3} = \frac{T_1^2}{T_4^2}$$

odkiaľ $a_4 = a_1 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{T_4^2}{T_1^2}}$

Dosadením hodnôt dostaneme:

$$a_4 = 4{,}218 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \cdot \sqrt[3]{\frac{16{,}689^2\ \mathrm{d}^2}{1{,}769^2\ \mathrm{d}^2}}$$

$$= 1{,}884 \cdot 10^9\ \mathrm{m}$$

$$= 1{,}884 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$$

P r í k l a d : 14

Venuša je pri pozorovaní voľným okom najkrajšia zo všetkých planét. Pri pozorovaniach však zistíme, že nie vždy rovnako jasne svieti a nie je vždy viditeľná. Ak ju pozorujeme menším ďalekohľadom, zistíme, že podobné ako Mesiac nám ukazuje fázy. Nezaškodí preto si aj tu trochu započítať.

Keď vieme, že polomer Venušinej obežnej dráhy je 0,723 a.j./1 a.j. je polomer zemskej dráhy/ a jeden siderický rok má 365,26 dní, aká je potom synodická obežná doba Venuše?

R i e š e n i e :

Nakoľko planéty majú vzhľadom k Slnku zanedbateľné hmotnosti, použijeme III. Keplerov zákon v pôvodnom tvare:

$$\frac{a^3_{♁}}{a^3_{♀}} = \frac{T^2_{♁}}{T^2_{♀}} \quad \text{odkiaľ} \quad T_{♀} = \sqrt{\frac{a^3_{♀} \cdot T^2_{♁}}{a^3_{♁}}} \quad \text{dosadením}$$

$$\text{dostaneme } T_{♀} = \sqrt{\frac{0{,}723^3 \cdot 365{,}26^2 \cdot d^2}{1^3}} \quad ; \ /a.j./.^3 \ \text{sa vykráti}$$

$$T_{♀} = 224{,}7 \ d \ - \ \text{siderická obežná doba.}$$

Pre relatívnu uhlovú rýchlosť medzi Venušou a Zemou platí $\omega_{rel} = \omega_{♀} - \omega_{♁}$. Ak toto delíme s 2π, dostaneme:

$$\frac{2\pi : 2\pi}{T_{syn}} = \frac{2\pi : 2\pi}{T_{♀}} - \frac{2\pi : 2\pi}{T_{♁}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_{♀}} - \frac{1}{T_{♁}} \Longrightarrow$$

$$T_{syn} = \frac{T_{♁} \cdot T_{♀}}{T_{♁} - T_{♀}} \quad \text{a dosadením hodnôt}$$

$$\text{konečne } T_{syn} = \frac{365{,}26 \cdot 224{,}7\ \cancel{d}^2}{365{,}26 - 224{,}7\ \cancel{d}} = \underline{\underline{583{,}9\ d}}$$

P r í k l a d : 15

Slnko už bolo popísané ako jeden z najvýznamnejších objektov. Určite nás bude zaujímať, akú má hmotnosť? Budeme prekvapení, ale my ho vieme vážiť na diaľku. Ako? Výpočtami! Vypočítajme si hmotnosť Slnka, keď vieme ako je od nás ďaleko a koľko dní nám trvá obeh okolo neho!

R i e š e n i e :

Vychádzajúc z gravitačného zákona a III. Keplerovho zákona, vypočítame hmotnosť priťahujúce telesa zo vzťahu:

$$m = \frac{4\pi^2 \; r^2}{G \cdot T^2}$$

r - vzdialenosť obiehajúceho telesa

G - gravitačná konštanta

T - obežná doba

Dosadením hodnôt dostaneme:

$$m = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}496^3 \cdot 10^{33} \; m^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \; m^3 \; kg^{-1} \; s^{-2} \cdot 365{,}26^2 \cdot 86\,400^2 \; s^2}$$

$$= 1{,}99 \cdot 10^{30} \; kg$$

P r í k l a d : 16

Určite sme už niečo počuli o stacionárnych alebo synchrónnych družiciach. Sú to veľmi významné družice, ktoré sa pozorovateľovi zo Zeme javia ako stojace nad jedným bodom zemského rovníka. používajú sa na prenos predovšetkým televíznych programov /olympiády, MS a iné/ cez kontinenty. Zaujímavé je vedieť, ako vysoko takéto družice lietajú. Vypočítajte si to!

R i e š e n i e :

Ak má byť družica stacionárna, jej obežná doba bude 24 hodín. Obežná doba družice na kruhovej dráhe sa počíta podľa vzťahu:

$$T_{druž} = 2\pi \, \frac{r}{R_{\oplus}} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$$

/r - polomer dráhy družice od stredu Zeme, g - gravitačné zrýchlenie na povrchu Zeme /

Úpravou tohoto vzťahu dostaneme :

$$T^2 = 4\pi^2 \, \frac{r^3}{R^2_{\oplus} \, g} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \, R^2_{\oplus} \, g}{4\,\pi^2}}$$

a dosadením hodnôt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{86\,400^2 \cdot s^2 \cdot 6{,}378^2 \cdot 10^{12}\,m^2 \cdot 9{,}81\,m \cdot s^{-2}}{4 \cdot 3{,}14^2}}$$

$$= 4{,}257 \cdot 10^7\,m$$

$$= 42\,570\,km$$

Výška h družice potom bude:

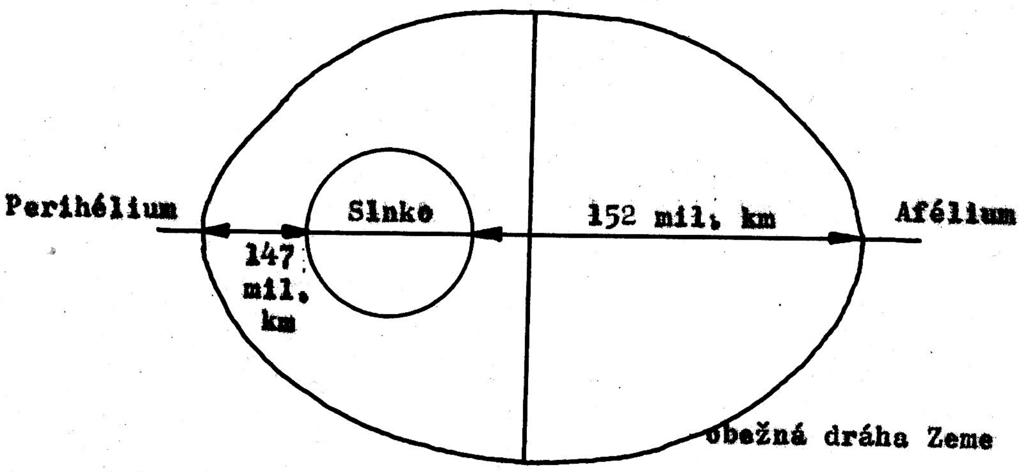
$$h = 42\,570\,km - 6\,378\,km$$

$$= 36\,192\,km \doteq 36\,200\,km$$

P r í k l a d : 17

Zistite o koľko sekúnd dorazí k nám slnečné svetlo skôr, keď je Zem v perihéliu, než keď je Zem v aféliu.

R i e š e n i e :



rýchlosť svetla: $c = 300\ 000$ km/s

vzdialenosť Slnko – afélium: $s_{af} = 152\ 000\ 000$ km

vzdialenosť Slnko – perihélium: $s_{per} = 147\ 000\ 000$ km

$$\Delta t = t_{af} - t_{per}$$

$$t_{af} = \frac{s_{af}}{c} = \frac{1\ 52\ 000\ 000\ \text{km}}{300\ 000\ \text{km s}^{-1}} = 506{,}6\ \text{s}$$

$$t_{per} = \frac{s_{per}}{c} = \frac{147\ 000\ 000\ \text{km}}{300\ 000\ \text{km s}^{-1}} = 490\ \text{s}$$

$$\Delta t = t_{ag} - t_{per} = 506{,}6\ \text{s} - 490\ \text{s} = 16{,}6\ \text{s}$$

P r í k l a d : 18

Vypočítajte únikovú rýchlosť na povrchu Slnka, keď viete, že hmotnosť Slnka je $1,987 \cdot 10^{33}$ g, priemer Slnka 1 391 700 km a gravitačná konštanta $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} m\ kg^{-11} s^{-2}$

R i e š e n i e :

Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva:

$$W_k + W_p = 0$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - \varkappa \frac{M_S \cdot m}{R_S} = 0 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2\varkappa M_S}{R_S}}$$

vieme: $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} m\ kg^{-1} s^{-2}$

$M_S = 1,987 \cdot 10^{30}$ kg - hmotnosť Slnka .

priemer Slnka $= 1\ 391\ 700 \cdot 10^3 m \Longrightarrow R_S = 695\ 850$ km

potom $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} /m\ kg^{-1} s^{-2}/ \cdot 1,987 \cdot 10^{30} /kg/}{695\ 850 \cdot 10^3\ /m/}}$

$v \doteq 6,1719 \cdot 10^5 m/s = 617,19\ km/s$

P r í k l a d : 19

Určite ste si pri pozorovaní oblohy všímli, že všetky hviezdy nesvietia rovnako jasne. Preto už dávno boli podľa viditeľnej jasnosti zadelené do šiestich tried, tzv. vizuálnych veľkostí - magnitúd.

Najslabšie, ešte voľným okom viditeľné hviezdy majú vizuálnu veľkosť m = 6. Čo myslíte, koľko takých hviezd by sa muselo nachádzať vedľa seba, aby ich voľné oko mohlo pozorovať ako jednu hviezdu vizuálnej veľkosti m = 0 ?

R i e š e n i e :

Pre rozdiel vizuálnych veľkostí dvoch hviezd platí:

$m_1 - m_2 = 2{,}5 \lg \frac{E_2}{E_1}$; dosadením za m dostaneme :

$6 - 0 = 2{,}5 \lg \frac{E_2}{E_1}$; ak označíme $E_2 = n \cdot E_1$

/ak intenzita žiarenia hviezdy 6 m je E_1 potom hviezda 0 m bude n-krát väčšia/, dostane posledná rovnica tvar:

$$6 = 2{,}5 \lg \frac{n \cdot E_1}{E_1} \quad \text{alebo } 2{,}4 = \lg n$$

ak $\lg n = 2{,}4$, potom antilogaritmovaním /použitie tabuliek/ dáva počet hviezd $\underline{n = 251}$

P r í k l a d : 20

Ak vieme, na Mesiaci už pristali kozmické lode, ktoré sa vrátili aj späť na našu Zem. Zrejme museli vedieť prekonať tiaž Mesiaca a teda dosiahnuť určitú rýchlosť - únikovú rýchlosť z Mesiaca. Vypočítajme si, aká je veľká úniková rýchlosť z Mesiaca, keď hmotnosť Mesiaca je $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg a jeho polomer 1 738 km.

R i e š e n i e :

Únikovú rýchlosť z Mesiaca vypočítame zo vzťahu:

$$V_ú = \sqrt{\frac{2\,G\,m}{R}}$$

Dosadením hodnôt plynie:

$$V_ú = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg}{1{,}738 \cdot 10^6 m}} =$$

$$\doteq 2\,375\ m/s \doteq 2{,}4\ km/s$$

Poznámka: Uvedený vzťah možno opäť odvodiť ako počítanie v rámci kurzu astronómie.

P r í k l a d : 21

Aká je priemerná stredná rýchlosť častíc na povrchu Slnka a vnútri Slnka, keď vieme že na povrchu Slnka je teplota 5 785 °K a nachádzajú sa tam prevažne atómy vodíka /hmotnosť 1,6 731 . 10^{-27}kg/; α častice /hmotnosť 6,6 428 . 10^{-27}kg / a vo vnútri Slnka je teplota asi 14 miliónov °K a nachádzajú sa tam prevažne protóny /hmotnosť 1,6 722 . 10^{-27} kg/.

R i e š e n i e :

Keď vychádzame z predpokladu, že plazma sa správa ako ideálny plyn, potom kinetická energia častice $\frac{1}{2}\, m\, v^2$ je rovná strednej kinetickej energie molekúl plynu $\mathcal{E} = \frac{i}{2}\, k\, T$, kde i je počet stupňov voľnosti. Jednoatomová molekula má 3 stupne voľnosti, teda môžeme napísať rovnosť:

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{3}{2}\, k\, T$$

$$v = \sqrt{\frac{3\, k\, T}{m}}$$

kde - k je Boltzmannova konštanta k = 1,3 805 . 10^{-23} J/dek
- T je teplota plynu /°K/
- m je hmotnosť častice /kg/

a/ na povrchu - rýchlosť atómov vodíka:

$$v_H = \sqrt{\frac{3 \,.\, 1{,}3\,805 \,.\, 10^{-23} \,.\, 5\,785}{1{,}6\,731 \,.\, 10^{-27}}}$$

$$v_H = 11{,}96 \,.\, 10^3\ m/s \doteq 12\ km/s$$

- rýchlosť α častíc:

$$v = \sqrt{\frac{3 \,.\, 1{,}3\,805 \,.\, 10^{-23} \,.\, 5\,785}{6{,}6\,428 \,.\, 10^{-27}}}$$

$v = 6{,}0 \cdot 10^3$ m/s $\doteq 6$ km/s

b/ vnútri Slnka:

$$v_p = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}3805 \cdot 10^{-23} \cdot 14 \cdot 10^6}{1{,}6722 \cdot 10^{-27}}}$$

$v_p = 5{,}89 \cdot 10^5$ m/s $= 5{,}89 \cdot 10^2$ km/s $=$ <u>589 km/s</u>

P r í k l a d : 22

Vypočítajte na ktorú vlnovú dĺžku v spektre žiarenia pripadá relatívne najviac energie:

a/ na povrchu Slnka

b/ vo vnútri Slnka

Povrch Slnka má teplotu asi 5 800 °K a vnútro asi 14 miliónov °K.

R i e š e n i e :

Podľa Wienovho posuvného zákona vlnová dĺžka pri ktorej absolútne čierne teleso /Slnko/ vyžaruje pomerne najviac energie je nepriamo úmerna absolútnej teplote.

$_{max} = \frac{b}{T}$; kde b = 0,00 289 m deg

Po dosadení číselných hodnôt dostávame:

a/ $\lambda_{max} = \frac{0,00\ 289}{6\ 000} = 0,\ 0\ 000\ 004\ 817\ m = \underline{\underline{4\ 817\ Å}}$

4 817 Å - modrá farba slnečného svetla

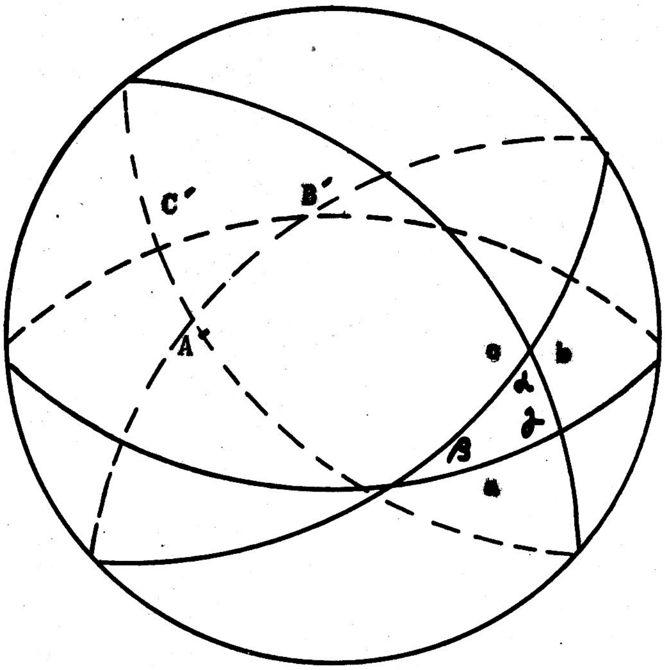
b/ $\lambda_{max} = \frac{0,00\ 289}{14\ 000\ 000} = 0,0\ 000\ 000\ 002\ m = \underline{\underline{2\ Å}}$

2 Å - röntgenový fotón

P r í k l a d : 23

Po sférickom dvojuholníku je pre sférickú trigonometriu nasledujúci a najdôležitejší útvar sférický trojuholník. Z týchto trojuholníkov budeme uvažovať len tie, ktorých vnútorné uhly sú všetky duté. Takéto sférické trojuholníky nazývame Eulerove. Odvoďme si vzorce pre odvod a obsah takého trojuholníka!

R i e š e n i e :



Nakreslíme si obrázok situácie /obr/. Najskôr odvodíme vzorec pre obvod. Δ ÀB̀C̀ nazývame vedľajší trojuholník k sférickému Δ ABC. Pre Δ ÀB̀C̀ platí:

$$a_1 = a \; ; \; b_1 = \pi - b \; ; \; c_1 = \pi - c \quad /1/$$

a ďalej $a_1 = a < b_1 + c_1$ /2/

Dosadením za b_1 a c_1 do /2/ plynie: $a < \pi - b + \pi - c$

úpravou: $\underline{a + b + c < 2\pi}$

Obvod Eulerovho sférického trojuholníka je vždy menší ako 2π.
Rozdiel Δ /delta/ = 2π - /a+b+c/ sa nazýva sférický defekt Δ ABC.

Teraz odvodíme vzorec pre obsah: Určite platí:

$A_{ABC} + A_{A'BC} = 2 \cdot R^2 \cdot \mathrm{arc}\,\alpha$; $A_{ABC} + A_{ACB'} = 2 \cdot R^2 \cdot \mathrm{arc}\,\beta$;

$A_{A'BC} + A_{ACB'} = 2 \cdot R^2 \cdot \mathrm{arc}\,/180^\circ - \gamma/$ - všetko sú obsahy sférických dvojuholníkov a platí: $A_{ACB'} = A_{BA'C'}$.

Sčítaním prvých dvoch rovníc dostaneme:

$$2A_{ABC} + A_{A'BC} + A_{ACB'} = 2R^2 \cdot /\mathrm{arc}\,\alpha + \mathrm{arc}\,\beta/$$

a odčítaním od tohoto výsledku tretej rovnice plynie:

$2A_{ABC} + A_{A'BC} + A_{ACB'} - A_{A'BC} - A_{ACB'} = 2R^2\,/\mathrm{arc}\,\alpha + \mathrm{arc}\,\beta + \mathrm{arc}\,\gamma -$
$- \mathrm{arc}\,180^\circ/$

a úpravou: $A_{ABC} = R^2 \mathrm{arc}\,/\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ/$ R - polomer gule

inač písané: $A_{ABC} = R^2 \cdot /\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \pi/$

Z tohoto výsledku plynie veta: Súčet uhlov sférického trojuholníka je vždy väčší ako 180°.

Pre jednoduchosť sa zvykne $\mathrm{arc}\,/\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ/$ označovať ε a nazývať sférický exces.

Potom vzorec pre obsah je:

$$A_{ABC} = \varepsilon \cdot R^2$$

P r í k l a d : 24

Vo vzdialenej Galaxii bol objavený systém planét našej slnečnej sústave. Stredná vzdialenosť planét od Slnka v tejto sústave je 2x menšia $/u_1/$, než sterdná vzdialenosť v našej sústave a všetky rozmery sú 3x menšie $/u_2/$, než rozmery v našej slnečnej sústave. Zistite, koľlo zemských dní trvá rok na analogickej Zemi?

R i e š e n i e :

Pri pohybe planét okolo Slnka platí rovnosť sily gravitačnej a odstredivej

$$\lambda \frac{m M}{L^2} = m\, \omega^2 L$$

kde L - polomer dráhy planéty,

ω - uhlová rýchlosť planéty

Odtiaľ:

$$\omega = \sqrt{\lambda \frac{M}{L^3}}$$

Vypočítame hmotu Slnka z jeho polomeru R a hustoty ρ

dostaneme: $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ a $\omega = \sqrt{\frac{4}{3} \lambda \pi \rho \frac{R^3}{L^3}}$

Podobne môžeme napísať uhlovú rýchlosť $\omega_\bullet$ pri pohybe Zeme okolo Slnka v našej slnečnej sústave.

$$\omega_\bullet = \sqrt{\frac{4}{3} \lambda \pi \rho_\bullet \frac{R_\bullet^3}{L_\bullet^3}}$$

Nájdeme vzťah pre uhlovú rýchlosť pre analogickú Zem a našu Zem.

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho\left(\frac{R}{L}\right)^3}{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3\left(\frac{L_0}{L}\right)^3}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{u_1}\left(\frac{1}{u_2}\right)^3\left(u_2\right)^3}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{u_1}}$$

Z toho: $\omega = \sqrt{\frac{1}{u_1}}\,\omega_0 =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_0$$

Uhlová rýchlosť analogickej Zeme je $\sqrt{2}$ x menšia ako uhlová rýchlosť samotnej Zeme. Preto rok na analogickej Zemi trvá $\frac{365}{\sqrt{2}}$ čo je asi 260 zemských dní.

P r í k l a d : 25

Každý kubický meter povrchu telesa zahriatého na teplotu T vyžiari za jednotku času energiu.

$$W = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ T^4\ V$$

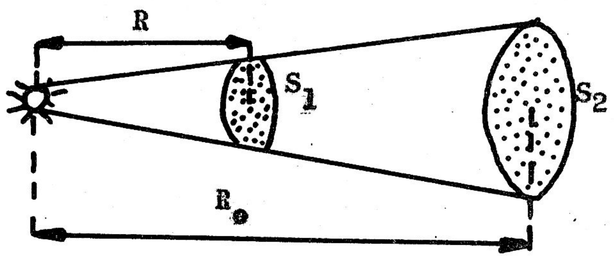
V akej vzdialenosti R od Slnka sa železné piliny zmenia na kvapalinu ak hustota slnečného toku vyžiareného /energia predchadzajúca za jednotku času cez jednotku plochy/ na planétu Zem je:

$$E_o = 1\ 400\ V/m^3 \quad ?$$

Teplota topenia železa nech je $T_o = 1\ 535$ K;

vzdialenosť Zeme od Slnka - $R_o = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

R i e š e n i e :



Pilinky železa sa zohrejú do takej teploty T, pri ktorej energia vyžiarená bude rovná energii prijatej od Slnka. Vyžiarená enrgia za jednotku času je súmerna s rovinou povrchu telesa. Predpokladajme pre zjednodušenie, že pilinky sú guľového tvaru s polomerom r. Potom energia vyžiarená za jednotku času každej pilinky nahriatej na teplotu T_o sa rovná $W_{vyž.} = 4\pi r^2\ W.$

Energia prijatáod Slnka za jednotku času je súmerná v rovine najväčšieho rozmeru pilinky t.j. πr^2 a rovná sa $W_{pohl.} = \pi r^2 E$ kde E je hustota slnečného toku na vzdialenosť R od Slnka, na ktorej sa nachádzajú pilinky.

Potom: $E\, S_1 + E_o\, S_2$

$$E = E_o \frac{S_2}{S_1} = E_o \left(\frac{R_o}{R} \right)^2$$

z toho: $W_{pohl.} = \pi r^2 E_o \left(\frac{R_o}{R} \right)^2$

Ak porovnáme $W_{vyž.}$ a $W_{pohl.}$

$$4 \pi r^2 W = \pi r^2 E_o \left(\frac{R_o}{R} \right)^2$$

dostaneme: $$R = \frac{R_o}{2} \sqrt{\frac{E_o}{W}}$$

$$= 5 \cdot 10^6 \text{km}$$

P r í k l a d : 26

18. októbra 1977 bolo v slnečnej sústave objavené teleso, ktoré dostalo označenie 1977 UB. Na svojej obežnej dráhe sa nachádza medzi Saturnom a Uranom. Obežna doba tejto mikroplanéty, makrokométy, alebo asteroidu vonkajšieho pásma bola odhadnutá na 50,63 roka.

Vypočítajte:

a/ aká je stredná vzdialenosť tohto telesa od Slnka,

b/ aká je jeho priemerna rýchlosť,

c/ aké zrýchlenie mu udeľuje Slnko.

Predpokladajme, že toto teleso vzniko a vyvíjalo sa v slnečnej sústave. Potom z priebehu hodnôt priemernej hustoty planét môžeme odhadnuť jeho hustotu na 2 g/cm^3. Prvé merania ukazujú, že jeho priemer sa pohybuje v intervale od 400 do 800 km.

Nech je jeho priemer 600 km, potom určite d/ jeho objem, e/ veľkosť povrchu, f/ hmotnosť, g/ gravitačné zrýchlenie na jeho povrchu, h/ prvá a druhá kozmická rýchlosť, i/ akou priemernou silou sa vzájomne priťahujú Slnko a 1977 UB.

/ Hmotnosť Slnka $M_S = 1,987 \cdot 10^{30}$ kg; $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3/kgs^2$; vzdialenosť Zem - Slnko = 150 mil.km t.j. astronomická jednotka A.J./

R i e š e n i e :

a/ Z III. Keplerovho zákona vyplýva:

$$\frac{T_z^2}{T_{ub}^2} = \frac{a_z^3}{a_{ub}^3}$$

kde: T_z - obežná doba Zeme / v rokoch /

T_{ub}- obežná doba 1977 UB / v rokoch /

a_z - hlavná poloos obežnej dráhy Zeme

a_{ub}- hlavná poloos obežnej dráhy 1977 UB

$$a_{ub} = 150\ 000\ 000 \cdot \sqrt[3]{50{,}63^2}$$

$$\underline{\underline{a_{ub} \doteq 2\ 053 \text{ milión km} \doteq 13{,}69 \text{ A.j.},}}$$

t.j. je asi 13 x ďalej než naša Zem.

b/

$$v = \frac{2\pi r}{T_{ub}}$$

kde r – priemerná vzdialenosť od Slnka /km/

T_{ub} – obežná doba 1977 UF /v sekundách/

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2\ 053 \cdot 10^6}{50{,}63 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}$$

$v \doteq 8{,}069$ km/s , čo je asi 4x menšia než pre Zem

/pre Saturn $v = 9{,}6$ km/s

pre Uran $v = 6{,}8$ km/s/

c/ Z II. Newtonovho pohybového zákona vyplýva, že:

$a = \frac{F}{m}$, kde F je príťažliva sila: $F = \varkappa \frac{M_m}{r^2}$

potom $a = \frac{M_S}{r^2}$, kde $\varkappa$ je Newtonová grav. konštanta

M_S – hmotnosť Slnka /kg/

r – vzdialenosť Slnka – 1977 UB /u/

$$a = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}987 \cdot 10^{30}}{(2\ 053 \cdot 10^9)^2}$$

$$\underline{\underline{a = 3{,}14 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2 = 0{,}0\ 314 \text{ mm/s}^2}},$$

čo je asi 200 krát menšie než pre Zem.

d/ V prípade, že sa jedná o teleso guľovitého tvaru /alebo aspoň tomuto tvaru podobné/ potom:

$V_{ub} = \frac{4}{3}\pi r^3$, kde r je polomer 1977 UB /t.j. asi 300 km/

$$V_{ub} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot /300/^3}{3}$$

$\underline{\underline{V_{ub} = 11{,}304 \cdot 10^7\ km^3}}$, čo je radovo 10 000 krát menej než Zem.

e/ Za podobných podmienok ako v prípade d/ platí:

$S_{ub} = 4\pi r^2 = \pi \cdot d^2$, kde d je priemer 1977 UB

$S_{ub} = 3{,}14 \cdot /600/^2$

$S_{ub} = 11{,}304 \cdot 10^5 km^2$, čo je radovo 100 krát menej než Zem.

f/ $m = \rho \cdot V$, kde ρ je priemerná hustota 1977 UB /kg/m^3/
V je objem 1977 UB /m^3/

$m = 2 \cdot 10^3 \cdot 11{,}304 \cdot 10^{16}$

$\underline{\underline{m = 22{,}608 \cdot 10^{19}\ kg}}$, čo je radovo 10 000 krát menej než Zem.

g/ Gravitačné zrýchlenie vypočítame zo vzťahu:

$g_{ub} = \varkappa \frac{M_{ub}}{r_{ub}^2}$, kde M_{ub} je hmotnosť 1977 UB /kg/
r_{ub} je polomer 1977 UB /m/

$$g_{ub} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 22{,}608 \cdot 10^{19}}{/3 \cdot 10^5/^2}$$

$g_{ub} = 16{,}76 \cdot 10^{-2}\ m/s^2$ $\underline{\underline{0{,}17\ m/s^2}}$

/ pre Zem je $g = 9{,}8\ m/s^2$ /

h/ Pre prvú kozmickú rýchlosť platí, že odstredivá sila $\frac{m v^2}{r}$ potrebná k udržaniu rovnomerného kruhového pohybu, musí kompenzovať gravitačná silu $\varkappa \frac{M m}{r^2}$; teda: $\frac{m v^2}{r} = \varkappa \frac{M m}{r^2}$

potom: $v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}$

keďže $\varkappa M = g r^2$, potom prvá rýchlosť

je: $v_1 = \sqrt{g_{ub} r_{ub}}$, kde g je gravitačné zrýchlenie na 1977 UB m/s²

r je polomer 1977 UB m

$v_1 = \sqrt{0{,}17 \cdot 3 \cdot 10^5}$

$v_1 = 225{,}8$ m/s = $\underline{\underline{0{,}23 \text{ km/s}}}$ /pre Zem je $v_1 = 7{,}9$ km/s/

Druhá kozmická rýchlosť je potrebná nato, aby sa vystrelené teleso z povrchu planéty už nevrátilo, tada aby opustilo sféru priťažlivosti planéty a stalo sa umelou obežnicou Slnka.

Preto vystrelenému telesu treba udeliť najmenej takú kinetickú energiu $\frac{1}{2} m v^2$, aká by bola jeho potenciálna energia v nekonečno m g r.

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g r$$

t.j.

$$v_{II} = \sqrt{2 g r}$$

$$v_{II.} = \sqrt{2 \cdot v_{I.}}$$

$$v_{II.} = \sqrt{2 \cdot 0{,}23}$$

$$\underline{\underline{v_{II.} = 0{,}33 \text{ km/s}}}$$

/pre Zem $v_{II.} = 11{,}2$ km/s/

i/ $F = \varkappa \frac{M_S \cdot M_{ub}}{r^2}$ kde M_S je hmotnosť Slnka /kg/
M_{ub} je hmotnosť 1977 UB /kg/
r je ich vzájomná vzdialenosť /m/

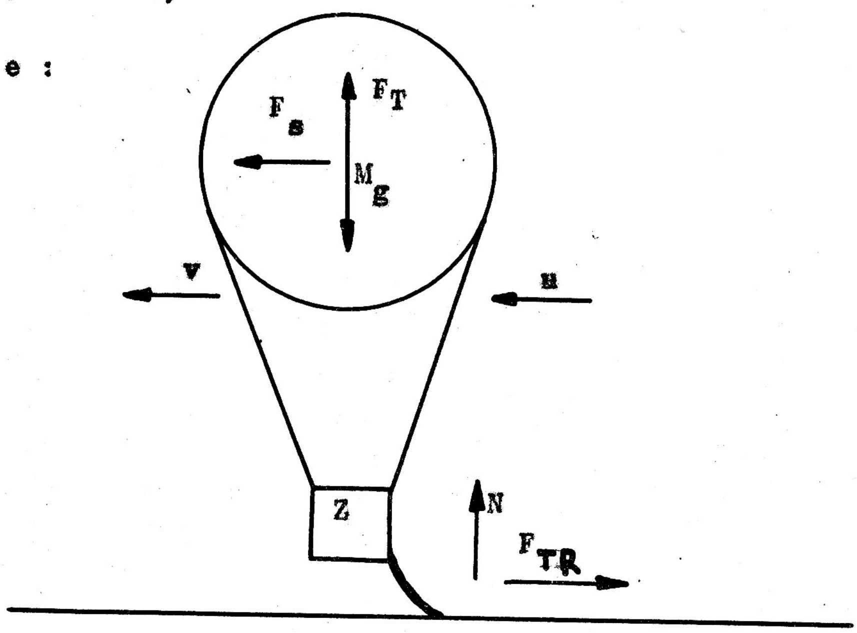
$$F = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}987 \cdot 10^{30} \cdot 22{,}608 \cdot 10^{19}}{/2{,}053 \cdot 10^{12}/^2}$$

$$\underline{\underline{F = 71{,}1 \cdot 10^{14} N}}$$

P r í k l a d : 27

Hmotnosť balóna s lanom je M. Na balón pôsobí vztlaková sila F, koeficient trenia lana o Zem je . Sila odboru vzduchu pôsobiaca na balón je priamo úmerná rýchlosti balóna vzhľadom na vzduch podľa $F_s = -\alpha v$. Určite rýchlosť balóna vzhľadom na Zem, ak vietor má horizontálnu rýchlosť u.

R i e š e n i e :



Na balón pôsobí päť síl: tiaž $F_T = M_g$, vztlaková sila F_T, sila odboru vzduchu F_s, sila reakcie Zeme N, sila trenia zo strany Zeme F_{TR}.

Označme si v′ rýchlosť balóna vzhľadom k Zemi, potom:

$$F_S = - /v' - u/$$

Z podmienok, že balón sa pohybuje rovnomerne v horizontálnom smere vyplýva:

$$/F_S/ - /F_{TR}/ = 0$$

$$\text{a} \quad /F/ + /N/ - M/g/ = 0$$

$$/F_{TR}/ = /N/$$

S prihliadnutím na rovnicu $F_S = -\alpha //v'/ - /u//$ a posledných troch rovníc vyplýva:

$$/v'/ = /u/ - \frac{u}{\alpha}/M/g/ - /F//$$

P r í k l a d : 28

Sputník sa pohybuje po kruhovej dráhe vo vzdialenosti rovnej jeho polomeru R od povrchu Zeme. V niektorej chvíli sa spustí zo sputnika stanica na druhú planétu. Potom zostavajúca časť sputníka sa pohybuje po eliptickej dráhe, dotýkajúcej sa povrchu Zeme v bode, nachádzajúcom sa oproti miesta štartu stanice.

Akú maximálnu časť v hmotnosti sputnika môže mať hmotnosť medziplanetárnej stanice? /Potenciálna energia celého komplexu hmotnosti./

R i e š e n i e :

Zo zadania vyplýva, že miesto štartu stanice sa javí najvzdialenejším bodom dráhy od Zeme. V tomto bode rýchlosť sputníka u a rýchlosť "zbytku" w v smere jednej priamky, kolmej na polomer vektora, smerujúceho z centra Zeme. /obr./

Zo zákona zachovania hybnosti platí:

$$M u = \mu w + u v \qquad /1/$$

M - hmotnosť sputnika

μ - hmotnosť zbytku

m - hmotnosť stanice

v - jej rýchlosť po štarte

Najvýhodnejšia je možnosť, keď rýchlosť stanice hneď po štarte má ten istý smer, ako rýchlosť sputnika tesne pred štartom, a rýchlosť "zbytku" v opačnú stranu. /obr./

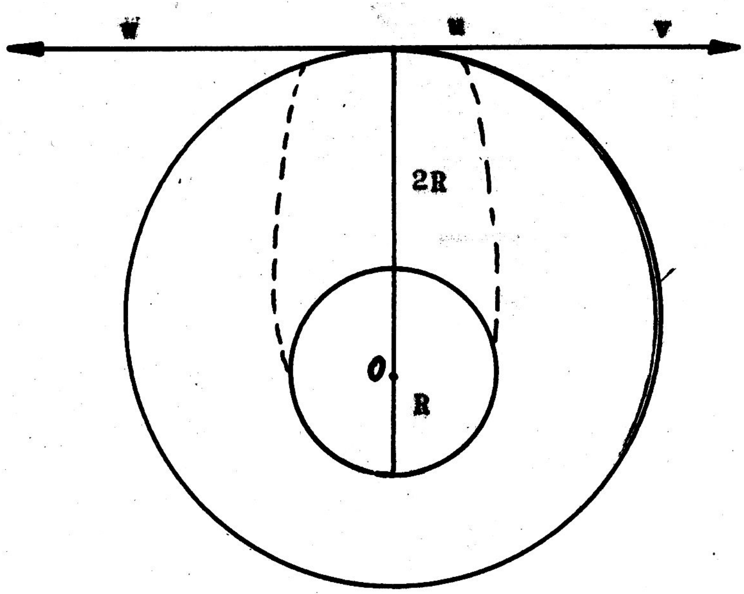
Potom: $/m\ v/ = /M\ u/ + /\mu\ v/ \qquad /2/$

Podielom: m:M dostaneme z /2/ vzťahu, keď m + = M

$$\frac{m}{M} = \frac{/u/ + /w/}{/v/ + /w/} \qquad /3/$$

Určíme hodnoty /w/, /v/, /u/

Obr.



Rýchlosť sputnika určíme z prípadu kruhového pohybu. Dostredivé zrýchlenie sputnika spôsobuje príťažlivosť Zeme.

$$\frac{M \cdot u^2}{2\,R} = \gamma \frac{M_o\,M}{4\,R^2}$$

M_o - hmotnosť Zeme

Odtiaľ: $$/u/ = \sqrt{\gamma \frac{M_o}{2\,R}}$$

Celková mechanická energia pri momente štartu je rovná

$$\frac{m\,v^2}{2} - \gamma \frac{M_o\,m}{2\,R}$$

Pri vzdiaľovaní od Zeme sa potenciálna energia zväčšuje a ďaleko od Zeme /v nekonečne / je rovná nule. Minimálna rýchlosť, ktorá má stanica v momente štartu, musí byť taká, aby pokles potenciálnej energie stanice, za čas letu bol rovný zväčšeniu jej potenciálnej energie. Potom nekonečne bude aj kinetická energia rovna nule. V momente štartu celková mechanická energia stanice musí byť rovná nule, t.j.

$$\frac{m\,v^2}{2} - \gamma \frac{M_o\,m}{2\,R} = 0$$

Odkiaľ: $$/v/ = \sqrt{\gamma \frac{M_o}{R}}$$

Vyjadrime si /w/ z druhého Keplerovho zákona, - polomer vektora "zbytku", pohybujúceho sa po elipse opíše za rovnaký čas rovnaké plochy.

Ak je v perihéliu rýchlosť w /obr./ za malý rozdiel času Δt potom:

$$2R /w/ \Delta t = R /w/ \Delta t \qquad /4/$$

Zo zákona zachovania energie:

$$\frac{\mu v^2}{2} - \gamma \frac{M_o \mu}{2R} = \frac{\mu /w/^2}{2} - \gamma \frac{M_o \mu}{R} \qquad /5/$$

z uvedených vzťahov /4/ a /5/ dostaneme:

$$w = \sqrt{\gamma \frac{M_o}{3R}}$$

Dosadením do /3/ čo sme vypočítali pre /u/, /v/ , /w/

dostaneme:

$$\underline{\underline{\frac{m}{M} \doteq 0{,}8}}$$

2. vydanie vydala: Okresná ľudová hvezdáreň Humenné v spolupráci s Krajskou hvezdárňou v Prešove

Náklad: 500 výtlačkov

Zodpovedný: riaditeľ KH Prešov Štefánia Fialková prom. ped.

Len pre vnútornú potrebu!

Nepredajné !

Autor: Matej Schmögner prom. ped.
Peter Ivan prom. ped.
Juraj Humeňanský prom. ped.

Vyšlo v roku 1978

2. vydanie vydané v roku 1983